Zu Aufgabe 10.3.

(a) Für ein Intervall $[a, b[\subset [0, 1[$ ist

$$\begin{aligned} P(Y \in [a,b[) &= \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} P(X \in [z+a, z+b[) \\ &= \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} \int_{z+a}^{z+b} f(x)\,dx \\ &= \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} \int_a^b f(z+t)\,dt \\ &= \int_a^b \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} f(z+t)\,dt \\ &= \int_a^b g(t)\,dt. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt verwendeten wir die Eigenschaft der monotonen Konvergenz für Integrale, um Summation und Integration zu vertauschen.
Dass die Summe $g(t) = \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} f(z+t)$ für beliebige $t \in [0, 1[$ endlich ist, kann man wie folgt beweisen: Ist z_o eine ganze Zahl mit $z_o + t \leq \mu < z_o + 1 + t$, dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{z > z_o + 1} f(z+t) &\leq \sum_{z > z_o+1} \int_{z-1+t}^{z+t} f(x)\,dx \;=\; \int_{z_o+1+t}^{\infty} f(x)\,dx, \\ \sum_{z < z_o} f(z+t) &\leq \sum_{z < z_o} \int_{z+t}^{z+1+t} f(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{z_o+t} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

(b) Für $0 \leq x < y < 1$ ist

$$g(x) - g(y) \;=\; \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} f(z+x) - \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} f(z+y).$$

Nun sei z_o eine ganze Zahl mit $z_o + y \leq \mu < z_o + 1 + y$. Dann ist

$$f(z+x) \;\leq\; \begin{cases} f(z+y) & \text{falls } z \leq z_o, \\ f(z-1+y) & \text{falls } z \geq z_o + 2, \end{cases}$$

so dass

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &\leq f(z_o+1+x) + \sum_{z \leq z_o} f(z+y) + \sum_{z \geq z_o+2} f(z-1+y) - g(y) \\ &= f(z_o+1+x) + \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} f(z+y) - g(y) \\ &= f(z_o+1+x) \\ &\leq f(\mu). \end{aligned}$$

Analog sei z_o eine ganze Zahl mit $z_o + x \le \mu < z_o + 1 + x$. Dann ist

$$f(z+y) \;\le\; \begin{cases} f(z+x) & \text{falls } z \ge z_o + 1, \\ f(z+1+x) & \text{falls } z \le z_o - 1, \end{cases}$$

so dass

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &\le g(x) - f(z_o + y) - \sum_{z \le z_o - 1} f(z+1+x) - \sum_{z \ge z_o + 1} f(z+x) \\ &= g(x) - f(z_o + y) - \sum_{z \in \boldsymbol{Z}} f(z+x) \\ &= -f(z_o + y) \\ &\ge -f(\mu). \qquad \square \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 10.5.
(a) Sei F die Verteilungsfunktion von X, also $F(t) = P(X \le t) = \int_0^t f(x)\,dx$ für $t \ge 0$. Für $r \in \mathbb{R}$ ist dann

$$P(Y \le r) \;=\; P(X \le 10^r) \;=\; F(10^r).$$

Als Funktion von r ist die rechte Seite stetig differenzierbar mit Ableitung

$$g(r) \;:=\; \frac{d}{dr} F(10^r) \;=\; f(10^r) \cdot \frac{d}{dr} 10^r \;=\; f(10^r) 10^r \log(10).$$

Diese Funktion g ist die Dichtefunktion von Y.
(b) Sei $\widetilde{Y} := Y \bmod 1 = \log_{10}(X) \bmod 1$. Die führende Dezimalziffer von X ist gleich $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ genau dann, wenn für eine ganze Zahl Z gilt:

$$k \cdot 10^Z \;\le\; X \;<\; (k+1) \cdot 10^Z,$$

also

$$\log_{10}(k) + Z \;\le\; Y \;<\; \log_{10}(k+1) + Z$$

bzw.

$$\log_{10}(k) \;\le\; \widetilde{Y} \;<\; \log_{10}(k+1).$$

Geht man nun davon aus, dass $\widetilde{Y}$ näherungsweise uniform verteilt ist auf $[0, 1]$, dann ist

$$\begin{aligned} P(\text{führ. Dez.ziffer von } X \text{ ist } k) &= P(\log_{10}(k) \le \widetilde{Y} < \log_{10}(k+1)) \\ &\approx \log_{10}(k+1) - \log_{10}(k) \\ &= \log_{10}(1 + 1/k). \qquad \square \end{aligned}$$