

**Zu Aufgabe 7.1.** Für  $X \sim \text{Geom}(p)$  ist

$$\begin{aligned} \text{EF}_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p s^k \\ &= p s \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} \\ &= \frac{ps}{1 - (1-p)s}. \quad \square \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 7.2.** Zunächst halten wir fest, dass

$$P(S \leq 0) = P(S = 0) = (1-p)^n = \exp(-nH_p(0))$$

und

$$P(S \geq n) = P(S = n) = p^n = \exp(-nH_p(1))$$

mit der üblichen Konvention, dass  $0 \cdot \log(0) := 0$ .

Nun betrachten wir also  $x \in (0, n)$ . Mit  $\tilde{x} := x/n$  ist

$$\frac{\text{MF}_S(t)}{\exp(tx)} = \frac{(1-p+pe^t)^n}{\exp(tx)} = \exp\left(n[\log(1-p+pe^t) - t\tilde{x}]\right).$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt} [\log(1-p+pe^t) - t\tilde{x}] = \frac{pe^t}{1-p+pe^t} - \tilde{x} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$$

genau dann, wenn

$$e^t \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{(1-p)\tilde{x}}{p(1-\tilde{x})}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist größer (bzw. kleiner) als Eins genau dann, wenn  $\tilde{x}$  größer (bzw. kleiner) ist als  $p$ . Mit

$$t_o := \log \frac{(1-p)\tilde{x}}{p(1-\tilde{x})}$$

folgt also aus Korollar 7.7, dass  $P(S \geq x)$  (bzw.  $P(S \leq x)$ ) nicht größer ist als

$$\exp\left(n[\log(1-p+pe^{t_o}) - t_o\tilde{x}]\right) = \exp(-nH_p(\tilde{x}))$$

falls  $p < \tilde{x} < 1$  (bzw.  $0 < \tilde{x} < p$ ). □