

Zu Aufgabe 3.1. Sei Tür I die vom Kandidaten zufällig gewählte Tür, Tür II die vom Moderator vorgeführte Tür und Tür III die verbleibende Tür. Das Auto befindet sich in jedem Falle hinter Tür I oder Tür III, denn der Moderator zeigt ja stets eine Tür mit Ziege. Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ ist das Auto hinter Tür I. Also ist es mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ hinter Tür III. Der Kandidat sollte daher stets seine erste Wahl zugunsten von Tür III abändern. $\square$

Zu Aufgabe 3.3.

Beweis 1: Wir beweisen die Ungleichungen durch vollständige Induktion nach n . Im Falle von $n = 1$ ist die Behauptung trivial, im Falle von $n = 2$ folgt sie aus der Formel $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. Angenommen die Behauptung wurde für $n \geq 1$ Ereignisse bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) - 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus dieser Ungleichung, dass

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j). \end{aligned}$$

Beweis 2: Sei $B_1 := A_1$, und für $2 \leq j \leq n$ sei $B_j := A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$. Also ist B_j der "neue Anteil" von A_j gegenüber $A_1, \dots, A_{j-1}$. Dann sind die Mengen $B_1, B_2, \dots, B_n$ paarweise disjunkt, es ist $B_i \subset A_i$, und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Folglich ist

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Andererseits folgt aus dieser Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P(A_1) + \sum_{j=2}^n \left(P(A_j) - P\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \cap A_j\right)\right) \\
&\geq P(A_1) + \sum_{j=2}^n \left(P(A_j) - \sum_{i=1}^{j-1} P(A_i \cap A_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j). \quad \square
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 3.4. Für Teil (a) betrachten wir $4m$ Plätze, auf welche die $4m$ Karten verteilt werden. Dabei entsprechen die Plätze Eins bis Vier dem speziellen Spieler. Man kann diese vier Plätze auf $[4m]_4$ Arten mit Karten belegen. Um auf den ersten Plätzen ein Quartett zu erhalten, gibt es $4m$ Möglichkeiten für Platz Eins. Danach liegt fest, welches Quartett unser Spieler erhält. Es gibt dann 3 Möglichkeiten für Platz Zwei, danach 2 Möglichkeiten für Platz Drei, und schließlich eine Möglichkeit für Platz Vier. Also ist

$$P[\text{spez. Spieler erhält Quartett}] = \frac{4m \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{[4m]_4} = \frac{6}{[4m-1]_3}.$$

Da es m Spieler gibt, ist nach Teil (a)

$$P[\text{irgendein Spieler erhält Quartett}] \leq \frac{6m}{[4m-1]_3}.$$

Speziell für $m = 8$ Spieler ergibt sich

$$P[\text{irgendein Spieler erhält Quartett}] \leq \frac{6 \cdot 8}{31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{8}{31 \cdot 5 \cdot 29} \approx 0.0018. \quad \square$$

Zu Aufgabe 3.7. (a)

$$\begin{aligned}
P(K | T) &= \frac{P(K)\text{Sens.}}{P(K)\text{Sens.} + (1 - P(K))(1 - \text{Spez.})} \\
&= \frac{0.02 \cdot 0.98}{0.02 \cdot 0.98 + 0.98 \cdot 0.15} \approx 0.118, \\
P(K^c | T^c) &= \frac{(1 - P(K))\text{Spez.}}{(1 - P(K))\text{Spez.} + P(K)(1 - \text{Sens.})} \\
&= \frac{0.98 \cdot 0.85}{0.98 \cdot 0.85 + 0.02 \cdot 0.02} \approx 1.000.
\end{aligned}$$

(b) Im Falle von $0 < P(K) < 1$ ist

$$\begin{aligned}
P(K|T) &= \frac{P(K)\text{Sens.}}{P(K)\text{Sens.} + (1 - P(K))(1 - \text{Spez.})} > P(K) \\
&\iff \text{Sens.} > P(K)\text{Sens.} + (1 - P(K))(1 - \text{Spez.}) \\
&\iff \text{Sens.} > 1 - \text{Spez.} \\
&\iff \text{Sens.} + \text{Spez.} > 1.
\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung oder eine einfache Symmetrieüberlegung ergeben, dass auch

$$P(K^c|T^c) > P(K^c) \iff \text{Sens.} + \text{Spez.} > 1.$$

(c) Für $P(K) \rightarrow 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{P(K|T)}{P(K)} &= \frac{\text{Sens.}}{P(K)\text{Sens.} + (1 - P(K))(1 - \text{Spez.})} \rightarrow \frac{\text{Sens.}}{1 - \text{Spez.}}, \\
\frac{P(K^c|T^c)}{P(K^c)} &= \frac{\text{Spez.}}{(1 - P(K))\text{Spez.} + P(K)(1 - \text{Sens.})} \rightarrow 1. \quad \square
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 3.8. Die Behauptung folgt induktiv aus der Formel

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\
&= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\
&= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2})P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2})P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\
&\vdots \\
&= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad \square
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 3.9. Gefangener A bedingt auf das Ereignis, dass C nicht begnadigt wird. Doch dieses Ereignis ist nicht identisch mit dem Ereignis, dass der Wärter antwortet: "Gefangener C wird nicht begnadigt". Tatsächlich kann man den Grundraum Ω in die folgenden vier Ereignisse unterteilen:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= [\text{A begnadigt, W: "C nicht begnadigt"}], \\
A_2 &:= [\text{A begnadigt, W: "B nicht begnadigt"}], \\
B &:= [\text{B begnadigt, W: "C nicht begnadigt"}], \\
C &:= [\text{C begnadigt, W: "B nicht begnadigt"}].
\end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, dass

$$P(A_1 \cup A_2) = P(B) = P(C) = 1/3.$$

Was A_1 und A_2 anbelangt, so könnte man noch unterstellen, dass

$$P(A_1) = P(A_2) = 1/6, \quad (*)$$

In der Tat ist

$$P(A \text{ begnadigt} \mid C \text{ nicht begnadigt}) = P(A_1 \cup A_2 \mid A_1 \cup A_2 \cup B) = 1/2.$$

Doch für Gefandenen A ist folgende Wahrscheinlichkeit relevant:

$$\begin{aligned} &P(A \text{ begnadigt} \mid W: \text{“C nicht begnadigt”}) \\ &= P(A_1 \cup A_2 \mid A_1 \cup B) = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(B)} \begin{cases} \in [0, 1/2], \\ = 1/3 \quad \text{im Falle von } (*). \end{cases} \end{aligned}$$

Interessanterweise ist

$$\begin{aligned} &P(B \text{ begnadigt} \mid W: \text{“C nicht begnadigt”}) \\ &= P(B \mid A_1 \cup B) = \frac{P(B)}{P(A_1) + P(B)} \begin{cases} \in [1/2, 1], \\ = 2/3 \quad \text{im Falle von } (*). \end{cases} \end{aligned}$$

Hätte also Gefangener B das Gespräch belauscht, so könnte er sich zu Recht freuen!

□

Zu Aufgabe 3.10. Es ist

$$\begin{aligned} \#A_i &= \#\mathcal{S}_{n-1}(\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}) = (n-1)!, \\ \#(A_i \cap A_j) &= \#\mathcal{S}_{n-2}(\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}) = (n-2)!, \\ \#A_j^c &= n! - \#A_j = (n-1)(n-1)!, \\ \#(A_i \cap A_j^c) &= \#A_i - \#(A_i \cap A_j) = (n-2)(n-2)!, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{1}{n}, \\ P(A_i \mid A_j) &= \frac{1}{n-1}, \\ P(A_i \mid A_j^c) &= \frac{n-2}{(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man zeigen, dass

$$P(A_i \mid A_j^c) < P(A_i) < P(A_i \mid A_j). \quad \square$$

Zu Aufgabe 3.11. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\omega_1 = k \mid \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 9)$ ist gleich

$$\begin{aligned}
\frac{P[\omega_1 = k, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 9]}{P[\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 9]} &= \frac{P[\omega_1 = k, \omega_2 + \omega_3 = 9 - k]}{\sum_{\ell=1}^6 P[\omega_1 = \ell, \omega_2 + \omega_3 = 9 - \ell]} \\
&= \frac{\#\{(\omega_2, \omega_3) : \omega_2 + \omega_3 = 9 - k\}}{\sum_{\ell=1}^6 \#\{(\omega_2, \omega_3) : \omega_2 + \omega_3 = 9 - \ell\}} \\
&= \frac{6 - |7 - (9 - k)|}{\sum_{\ell=1}^6 (6 - |7 - (9 - \ell)|)} \\
&= \frac{6 - |k - 2|}{\sum_{\ell=1}^6 (6 - |\ell - 2|)} = \frac{6 - |k - 2|}{25} \\
&= \begin{cases} 0.20 \text{ falls } k = 1, \\ 0.24 \text{ falls } k = 2, \\ 0.20 \text{ falls } k = 3, \\ 0.16 \text{ falls } k = 4, \\ 0.12 \text{ falls } k = 5, \\ 0.08 \text{ falls } k = 6. \end{cases} \quad \square
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 3.14. Die Anzahl Z funktionierender Duschen ist binomialverteilt mit Parametern 5 und p . Folglich ist die besagte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\begin{aligned}
P(Z = 5 | Z \geq 4) &= \frac{P\{Z = 5\}}{P\{Z \geq 4\}} \\
&= \frac{P\{Z = 5\}}{P\{Z = 4\} + P\{Z = 5\}} \\
&= \frac{p^5}{5(1-p)p^4 + p^5} \\
&= \frac{p}{5 - 4p}. \quad \square
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 3.15. Wir bedingen auf den Zustand der Leitung (2-3). Wenn diese funktioniert, besteht keine Verbindung zwischen (1) und (4) genau dann, wenn gilt: Die Leitungen (1-2) und (1-3) sind defekt, oder die Leitungen (2-4) und (3-4) sind defekt. Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$\begin{aligned}
&P[(1-2) \text{ und } (1-3) \text{ defekt}] + P[(2-4) \text{ und } (3-4) \text{ defekt}] \\
&\quad - P[(1-2), (1-3), (2-4), (3-4) \text{ defekt}] \\
&= 2p^2 - p^4.
\end{aligned}$$

Im Falle einer defekten Leitung (2-3) gibt es keine Verbindung zwischen (1) und (4) genau dann, wenn gilt: Leitung (1-2) oder (2-4) ist defekt, und Leitung (1-3) oder (3-4) ist defekt. Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$\begin{aligned}
& P\left[[(1-2) \text{ oder } (2-4) \text{ defekt}] \text{ und } [(1-3) \text{ oder } (3-4) \text{ defekt}]\right] \\
&= P[(1-2) \text{ oder } (2-4) \text{ defekt}]P[(1-3) \text{ oder } (3-4) \text{ defekt}] \\
&= (2p - p^2)(2p - p^2) \\
&= 4p^2 - 4p^3 + p^4.
\end{aligned}$$

Alles in allem ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& P[\text{keine Verbindung zwischen (1) und (4)}] \\
&= (1 - p)(2p^2 - p^4) + p(4p^2 - 4p^3 - p^4) \\
&= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5. \quad \square
\end{aligned}$$