Zu Aufgabe 2.1. (a) Wir stellen uns vor, dass die Jugendlichen sich nacheinander setzen. Der Erste hat sieben Plätze zur Auswahl. Danach stehen dem Zweiten noch sechs Plätze zur Verfügung. Für den Dritten gibt es dann noch fünf Möglichkeiten und so weiter. Also gibt es insgesamt

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 7! \;=\; 5040$$

Möglichkeiten.

(b) Hier besetzen wir nacheinander die vier Plätze. Auf den ersten Platz können wir einen von sieben Jugendlichen setzen. Danach gibt es noch sechs Kandidaten für den zweiten Platz, danach fünf Kandidaten für den dritten Platz und schließlich vier Kandidaten für den vierten Platz. Dies sind insgesamt

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \;=\; [7]_4 \;=\; 840$$

Möglichkeiten.

(c) Wir stellen uns vor, dass wir nacheinander drei Jugendliche auswählen, die nicht mitfahren dürfen. Dafür gibt es

$$7 \cdot 6 \cdot 5$$

Möglichkeiten. Allerdings spielt hier die Reihenfolge, in der die Jugendlichen ausgewählt werden, keine Rolle. Für eine gegebene Teilgruppe von drei Jugendlichen gibt es genau $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mögliche Reihenfolgen, in denen wir sie auswählen könnten. Daher gibt es

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \;=\; \frac{[7]_3}{3!} \;=\; 35$$

mögliche Festlegungen der drei Wartenden.

(d) Auch hier stellen wir uns vor, dass die Jugendlichen sich nacheinander einen Platz suchen. Der Erste hat 16 Plätze zur Auswahl. Danach stehen dem Zweiten noch 15 Plätze zur Verfügung. Für den Dritten gibt es dann noch 14 Möglichkeiten und so weiter, bis sich der Letzte auf einen von zehn freien Plätzen setzt. Also gibt es insgesamt

$$16 \cdot 15 \cdots 10 \;=\; [16]_7 \;=\; 57657600$$

Möglichkeiten. $\square$

Zu Aufgabe 2.2. (a) Um eine k–elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n+1\}$ auszuwählen, lege ich zunächst einmal fest, ob sie die Zahl $n+1$ enthalten soll oder nicht. Wenn sie die Zahl $n+1$ nicht enthält, muss ich k Elemente von $\{1,\ldots,n\}$ auswählen, wofür es $b(n,k)$ Möglichkeiten gibt. Wenn die zu wählende Menge die Zahl $n+1$ enthält, muss ich noch $k-1$ Elemente von $\{1,\ldots,n\}$ wählen, wofür es $b(n,k-1)$ Möglichkeiten gibt. Insgesamt habe ich also

$$b(n,k)+b(n,k-1)$$

Möglichkeiten die Menge zu wählen.

(b) Um eine k–elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n+1\}$ zu wählen, kann ich zunächst ihr maximales Element, genannt m, festlegen. Für diese Zahl m kommt jede Zahl aus $\{k,\ldots,n+1\}$ in Frage. Danach muss ich aus der Menge $\{1,\ldots,m-1\}$ noch $k-1$ Elemente auswählen, wofür es $b(m-1,k-1)$ Möglichkeiten gibt. Insgesamt habe ich also

$$\sum_{m=k}^{n+1} b(m-1,k-1) \;=\; \sum_{i=k-1}^{n} b(i,k-1)$$

Möglichkeiten die Menge zu wählen.

Anmerkung. Wenn man nun die bekannte Formel

$$b(n,k) \;=\; \binom{n}{k} \;=\; \frac{[n]_k}{k!}$$

einsetzt, dann ergibt sich die allgemeine Formel

$$\frac{[n+1]_k}{k!} \;=\; \sum_{i=k-1}^{n} \frac{[i]_{k-1}}{(k-1)!},$$

also

$$\sum_{i=1}^{n} [i]_{k-1} \;=\; \frac{[n+1]_k}{k}.$$

(Für $i<k-1$ ist ohnehin $[i]_{k-1}=0$.) Speziell für $k=2$ ergibt dies:

$$\sum_{i=1}^{n} i \;=\; \frac{(n+1)n}{2}.$$

Für $k=3$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) \;=\; \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Doch die linke Seite ist gleich

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{(n+1)n}{2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \;=\; \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \;=\; \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

Im Prinzip kann man induktiv für beliebige Zahlen e $(= k-1)$ aus $\{3, 4, 5, \ldots\}$ die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} i^e$$

bestimmen. Denn $[i]_e = i^e + \sum_{j=1}^{e-1} a_{e,j} i^j$ mit gewissen Koeffizienten $a_{e,j}$. $\square$

Zu Aufgabe 2.3. (a) Mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$ ist $\#\Omega = 6^3 = 216$ und

$$\begin{aligned}
\#\Big\{\omega \in \Omega : \omega_1 \geq \max\{\omega_2, \omega_3\}\Big\} &= \sum_{k=1}^{6} \#\Big\{\omega \in \Omega : \omega_1 = k, \omega_1 \geq \max\{\omega_2, \omega_3\}\Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{6} \#\Big\{\omega \in \Omega : \omega_1 = k, \omega_2 \leq k, \omega_3 \leq k\Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{6} k^2 \;=\; 91.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$P[\omega_1 \geq \max\{\omega_2, \omega_3\}] \;=\; \frac{91}{216} \;\approx\; 0.421.$$

Im Falle des n–maligen Würfelns ist

$$\begin{aligned}
P[\omega_1 \geq \max\{\omega_2, \dots, \omega_n\}] &= \sum_{k=1}^{6} P[\omega_1 = k, \omega_i \leq k \text{ für } 2 \leq i \leq n] \\
&= \sum_{k=1}^{6} \frac{k^{n-1}}{6^n}.
\end{aligned}$$

(b) Lösungsvorschlag 1:

$$\begin{aligned}
P[\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3] &= \sum_{j=1}^{6} P[\omega_2 = j, \omega_1 \leq j \leq \omega_3] \\
&= \sum_{j=1}^{6} \frac{j(7-j)}{6^3} \\
&= \frac{56}{216} \;=\; \frac{7}{27} \;\approx\; 0.2593.
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag 2: Wir betrachten n-maliges Würfeln und die Menge A aller Tupel $\omega \in \{1, 2, \dots, 6\}^n$ mit $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$. Ein solches Tupel ω kann man eindeutig durch eine 5–elementige Teilmenge M von $\{1, 2, \dots, n+5\}$ beschreiben. Sei nämlich $M = \{m_1, \dots, m_5\}$ mit $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_5 \leq n+5$. Dies entspricht einem Tupel $\omega \in A$ mit $m_1 - 1$ Einsen, $m_2 - m_1 - 1$ Zweien, $m_3 - m_2 - 1$ Dreien, ... und $n + 5 - m_5$ Sechsen:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots & m_1 & \cdots & m_2 & \cdots & m_5 \cdots n+5 \\ 1, \dots, 1 & \bullet & 2, \dots, 2 & \bullet & \cdots & \bullet \quad 6, \dots, 6 \end{pmatrix}$$

Folglich besteht A aus $\binom{n+5}{5}$ Tupeln, und insgesamt gibt es 6^n Tupel, so dass

$$P(A) \;=\; \frac{\binom{n+5}{5}}{6^n}. \qquad \square$$

Zu Aufgabe 2.4. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller 23 Gummibärchen, bestehend aus den Mengen $\mathcal{M}_{\mathrm{rot}}$ aller roten, $\mathcal{M}_{\mathrm{gelb}}$ aller gelben und $\mathcal{M}_{\mathrm{gruen}}$ aller grünen Gummibärchen. Das Kind greift dreimal hintereinander in die Tüte ohne Zurücklegen. Also betrachten wir den Grundraum

$$\Omega \;=\; \mathcal{S}_3(\mathcal{M})$$

mit $\#\Omega = [23]_3$ Elementen. (Man könnte auch sagen, dass das Kind nur einmal in die Tüte greift und sich drei Stück herausgreift. In diesem Fall wäre unser Grundraum die Menge aller drei-elementigen Teilmengen von $\mathcal{M}$. Die Rechnungen wären dann fast identisch.) Nun ist

$$\begin{aligned} A &:= [\text{dreimal gleiche Farbe}] \\ &= [\text{dreimal rot}] \cup [\text{dreimal gelb}] \cup [\text{dreimal grün}] \\ &= \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_{\mathrm{rot}}) \cup \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_{\mathrm{gelb}}) \cup \mathcal{S}_3(\mathcal{M}_{\mathrm{gruen}}). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$P(A) \;=\; \frac{[10]_3 + [8]_3 + [5]_3}{[23]_3} \;=\; \frac{1116}{10626} \;\approx\; 0.105. \qquad \square$$

Zu Aufgabe 2.5.

Lösungsvorschlag 1: Die Menge der günstigen Fälle ist $A \cup B$ mit den disjunkten Ereignissen

$$A := [\text{Jeder Spieler erhält genau einen Buben}],$$
$$B := [\text{Ein Spieler erhält zwei Buben, die anderen jeweils einen}].$$

Wie in Beispiel 2.7 gezeigt wurde, ist $\#A = 10^3 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 28!$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\#B = 3 \qquad & (\text{welcher Spieler erhält zwei Buben}) \\
\cdot \binom{10}{2} \cdot 10 \cdot 10 \qquad & (\text{wo ist irgendein Bube}) \\
\cdot\, 4! \qquad & (\text{Zuordnen der Buben auf vier feste Positionen}) \\
\cdot\, 28! \qquad & (\text{wo sind dann die übrigen 28 Karten}).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= \frac{3 \cdot (10 \cdot 9/2) \cdot 10^2 \cdot 4! + 2 \cdot 10^3 \cdot 4!}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \\
&= \frac{10^3 \cdot 4! \cdot (27/2 + 2)}{32 \cdot 31 \cdot \cdot 30 \cdot 29} = \frac{10^3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 31}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \\
&= \frac{25}{2 \cdot 29} \approx 0.431. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag 2: Man wendet die Siebformel auf das Gegenereignis an: Sei B_i das Ereignis, dass Spieler i keinen Buben erhält. Dann folgt aus der Siebformel und Symmetrieüberlegungen, dass

$$\begin{aligned}
& P[\text{jeder Spieler erhält mind. einen Buben}] \\
& = 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\
& = 1 - 3P(B_1) + 3P(B_1 \cap B_2),
\end{aligned}$$

denn $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Doch

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{[22]_4}{[32]_4}, \\
P(B_1 \cap B_2) &= \frac{[12]_4}{[32]_4} \quad \ldots \qquad \square
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 2.6.

(a) Auch hier denken wir an 48 zunächst leere Plätze, auf welche die 48 Karten nacheinander verteilt werden. Hierfür gibt es $48!$ Möglichkeiten. Nun zu dem Ereignis, dass irgendein Spieler beide Kreuz-Damen erhält: Es gibt 48 Möglichkeiten, die erste Kreuz-Dame zu setzen. Danach muss man die zweite Kreuz-Dame dem gleichen Spieler zuteilen, wofür es 11 Möglichkeiten gibt. Danach kann man die 46 übrigen karten auf 46 freie Plätze verteilen, wofür es $46!$ Möglichkeiten gibt. Also ist

$$P[\text{irg. Spieler erhält beide Kreuz-Damen}] \;=\; \frac{48 \cdot 11 \cdot 46!}{48!} \;=\; \frac{11}{47} \;\approx\; 0.234\,.$$

(b) Sei B_i das Ereignis, dass Spieler i keine der sechs besonderen Karten erhält. Dann folgt aus der Siebformel und Symmetrieüberlegungen, dass

$$\begin{aligned}
&P[\text{jeder Spieler erhält mind. eine der bes. Karten}]\\
&= 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)\\
&= 1 - 4P(B_1) + 6P(B_1 \cap B_2) - 4P(B_1 \cap B_2 \cap B_3),
\end{aligned}$$

denn $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 = \emptyset$. Doch

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{[36]_6}{[48]_6},\\
P(B_1 \cap B_2) &= \frac{[24]_6}{[48]_6},\\
P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= \frac{[12]_6}{[48]_6}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also bis auf Rundungsfehler gleich

$$1 - 4 \cdot 0.1587 + 6 \cdot 0.0110 - 4 \cdot 0.0001 \;\approx\; 0.4306. \qquad \square$$

Zu Aufgabe 2.7. Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, 365\}$ und den Grundraum $\Omega = \mathcal{M}^{17}$ mit 365^{17} Elementen. Das Ereignis, dass die 17 Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben, ist dann die Menge $\mathcal{S}_{17}(\mathcal{M})$ mit $[365]_{17}$ Elementen. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{[365]_{17}}{365^{17}} \;\approx\; 0.6850\,.$$

Allgemein gilt beim Ziehen einer Stichprobe vom Umfang n mit Zurücklegen aus einer Population $\mathcal{M}$ von N Individuen:

$$P[\text{alle } n \text{ Stichprobenelemente verschieden}] \;=\; \frac{\#\mathcal{S}_n(\mathcal{M})}{\#\mathcal{M}^n} \;=\; \frac{[N]_n}{N^n}. \qquad \square$$

Zu Aufgabe 2.8. Im Falle des sechsmaligen Würfelns ist

$$P[\text{mindestens eine Sechs}] \;=\; 1 - P[\text{keine Sechs}] \;=\; 1 - (5/6)^6 \;\approx\; 0.6651.$$

Im Falle des 12-maligen Würfelns ist $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^{12}$, und

$$\begin{aligned}
&P[\text{mindestens zwei Sechsen}]\\
&= 1 - P[\text{keine Sechs}] - P[\text{genau eine Sechs}]\\
&= 1 - (5/6)^{12} - \sum_{i=1}^{12} P\Big\{\omega \in \Omega : \omega_i = 6, \omega_j \le 5 \text{ für } j \neq i\Big\}\\
&= 1 - (5/6)^{12} - 12 \times 5^{11}/6^{12}\\
&= 1 - (5/6)^{11}(5/6 + 2) \;\approx\; 0.6187.
\end{aligned}$$

Also ist das Spiel mit sechsmaligem Würfeln günstiger. □

Zu Aufgabe 2.9. Im Falle von $N \geq 4$ gibt es N Möglichkeiten, drei nebeneinanderliegende Plätze zu wählen, und $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Freundinnen dort zu plazieren. Die übrigen Gaste kann man dann auf $(N-3)!$ Arten an den Tisch setzen. Folglich ist

$$P[\text{alle drei nebeneinander}] \;=\; \frac{N \cdot 3! \cdot (N-3)!}{N!} \;=\; \frac{6}{(N-1)(N-2)}$$

Möchte man zwei aber nicht drei Freundinnen zusammensetzen, so gibt es N Möglichkeiten, die beiden benachbarten Plätze zu wählen, und dann $N-4$ Möglichkeiten, den dritten, isolierten Platz zu wählen. Folglich ist

$$\begin{aligned}
P[\text{genau zwei nebeneinander}] &= \frac{N \cdot (N-4) \cdot 3! \cdot (N-3)!}{N!}\\
&= \frac{6 \cdot (N-4)}{(N-1)(N-2)}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
&P[\text{mindestens zwei nebeneinander}]\\
&= \frac{6}{(N-1)(N-2)} + \frac{6 \cdot (N-4)}{(N-1)(N-2)} \;=\; \frac{6 \cdot (N-3)}{(N-1)(N-2)}.
\end{aligned}$$

□

Zu Aufgabe 2.10. Als Grundraum wählen wir die Menge Ω aller sechs–elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$, versehen mit der Gleichverteilung. Es gibt 46 Mengen aus vier aufeinanderfolgenden Zahlen, nämlich $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\ldots$, $\{46, 47, 48, 49\}$. Allerdings sind die Ereignisse $A_i = \Big\{M \in \Omega : \{i, i+1, i+2, i+3\} \subset M\Big\}$ nicht paarweise disjunkt! Um diesem Problem abzuhelfen, betrachten für eine Menge M, die einen 4er-Block enthält, denjenigen 4er-Block mit den größten Zahlen. Dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{46} A_i = \bigcup_{i=1}^{46} B_i$$

mit

$$B_i := \Big\{M \in \Omega : \{i, i+1, i+2, i+3\} \subset M, i+1 \notin M\Big\}.$$

Die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_{46}$ sind paarweise disjunkt mit

$$\begin{aligned} \#B_i &= \#\Big\{T \subset \{1, 2, \ldots, 49\} \setminus \{i, i+1, \ldots, i+4\} : \#T = 2\Big\} \\ &= \begin{cases} \binom{44}{2} \text{ falls } i < 46, \\ \\ \binom{45}{2} \text{ falls } i = 46. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{46} B_i\Big) = \frac{45 \cdot \binom{44}{2} + \binom{45}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 22}{\binom{49}{6}} = \frac{165}{52969} \approx 0.0031. \qquad \square$$

Zu Aufgabe 2.11. Sei Ω die Menge aller Kinder. Wenn es insgesamt N Familien gibt, dann ist die Gesamtzahl von Kindern gleich

$$\#\Omega = \sum_{j \geq 1} N \cdot p_j \cdot j,$$

wobei p_j den relativen Anteil aller Familien mit genau j Kindern bezeichnet. Die Menge A_k aller Kinder mit genau k Geschwistern besteht aus $N \cdot p_{k+1} \cdot (k+1)$ Kindern. Also ist

$$P[\text{genau } k \text{ Geschwister}] = \frac{\#A_k}{\#\Omega} = \frac{p_{k+1} \cdot (k+1)}{\sum_{j \geq 1} p_j \cdot j}. \qquad \square$$